

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ УКРАЇНИ
ЗАПОРІЗЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ**

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до розрахунково-проектувальних задач з курсу
“Опір матеріалів” із застосуванням ПЕОМ для студентів
механічних спеціальностей всіх форм навчання

Частина IV

Затверджено
на засіданні
кафедри “Опір матеріалів”
Протокол № 6 від 26.04 1999 р.

1999

Методичні вказівки до розрахунково-проектувальних задач з курсу “Опір матеріалів” із застосуванням ПЕОМ для студентів механічних спеціальностей всіх форм навчання. Частина IV. /Складачі: В.Г. Шевченко, Борисенко І.Г., Кудін В.Т., Мазіна О.В. Запоріжжя: ЗДТУ, 1999 р. -29 с.

Складачі: В.Г. Шевченко, зав. кафедрою, к.т.н., доцент
І.Г. Борисенко, к.т.н., доцент
В.Т. Кудін, к.т.н., доцент
О.В. Мазіна, ст. лаборант

Рецензент: А.О. Будник, к.т.н., доцент

Відповідальний за випуск: завідуючий кафедрою Шевченко В.Г.

З М І С Т

Передмова	4
1. Розрахунки на міцність при неплоскому згинанні	5
1.1 Короткі теоретичні відомості	5
1.2 Приклад розв'язку задачі	6
2. Розрахунки на міцність і стійкість стиснутих стержнів	10
2.1 Короткі теоретичні відомості	10
2.2 Приклад розв'язку задачі	11
3. Розрахунки на міцність при коливаннях	15
3.1 Короткі теоретичні відомості	15
3.2 Приклад розв'язку задачі	15
4. Розрахунки на міцність при ударних навантаженнях	18
4.1 Короткі теоретичні відомості	18
4.2 Приклад розв'язку задачі	19
5. Розрахунки на міцність з урахуванням сил інерції	24
5.1 Короткі теоретичні відомості	24
5.2 Приклад розв'язку задачі	25
6. Література	25
Додатки	28
	29

ПЕРЕДМОВА

Мета даних методичних вказівок – допомогти студентам засвоїти відповідні розділи курсу “Опір матеріалів”, опанувати методи розв’язання типових задач і набути необхідні навички розрахунків і проектування елементів механічних систем [1].

У пропонованих методичних вказівках наведено короткі теоретичні відомості з відповідних тем та розділів дисципліни. Докладно розглянуто приклади розв’язання задач на теми: “Розрахунки на міцність при неплоскому згинанні” (задача №12), “Розрахунки на міцність і стійкість стиснутих стержнів” (задача №17), “Розрахунки на міцність при коливаннях” (задача №19), “Розрахунки на міцність при ударних навантаженнях” (задача №20), “Розрахунки на міцність з урахуванням сил інерції” (задача №21). Приклади наведено у відповідності з рекомендаціями методичних вказівок і контрольних завдань з опору матеріалів для всіх технічних спеціальностей вищих навчальних закладів [2].

Умови задач наведено в контрольних завданнях та на відповідних кафедральних стендах [3].

Для розв’язування задач із застосуванням ПЕОМ на кафедрі розроблено спеціальне програмне забезпечення для мережевого класу.

1 РОЗРАХУНКИ НА МІЦНІСТЬ ПРИ НЕПЛОСКОМУ ЗГИНАННІ

1.1 Короткі теоретичні відомості

Складне згинання спричинюється силами або моментами, розташованими у різних площинах, які проходять крізь вісь балки і не співпадають з головними осями інерції. Таке згинання зветься також неплоским, оскільки зігнута вісь балки не лежить у силевій площині[1].

Складне згинання можна завжди сприймати як суму двох плоских (прямих) згинань.

Перевіряти міцність слід у тих перерізах, де осьові згинальні моменти одночасно великі.

Якщо небезпечний переріз відомий, то в ньому треба відшукати небезпечні точки. Наочне уявлення про розподіл напружень дають відповідні епюри. Положення нейтральної лінії визначають за формулою:

$$\operatorname{tg}\alpha = -\frac{M_y}{M_x} \cdot \frac{I_x}{I_y} \quad \text{або} \quad \left| \frac{M_y}{M_x} \cdot \frac{I_x}{I_y} \right|$$

У загальному випадку нейтральна лінія проходить крізь початок координат перерізу і квадранти з різними знаками напружень.

Якщо переріз має вигляд прямокутника або інших форм, що в нього вписуються (двотавр, швелер, тощо), то найбільші напруження будуть виникати в крайніх кутових точках, при чому

$$\frac{I_x}{Y_{\max}} = W_x, \quad \frac{I_y}{X_{\max}} = W_y.$$

В загальному випадку умова міцності набуває вигляд:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} \leq [\sigma].$$

При розрахунках на міцність треба спочатку задати співвідношення моментів опору $\frac{W_x}{W_y}$).

1.2 Приклад розв'язку задачі

Дерев'яна балка (Рис. 1.1) прямокутного поперечного перерізу навантажена вертикальною силою P у точці A і горизонтальною силою P у точці B . На опорах балки можуть виникнути як вертикальні так і горизонтальні реакції, що направлені перпендикулярно площині креслення. Необхідно:

а) побудувати епюри згинальних моментів у вертикальній і горизонтальній площинах та визначити положення небезпечного перерізу;

б) підібрати розміри поперечного перерізу при допустимому напруженні $[\sigma] = 8 \text{ МПа}$;

в) визначити положення нейтральної лінії у небезпечному перерізі та побудувати для цього перерізу епюру нормальних напружень в аксонометрії. Дані треба брати у відповідності з номером залікової книжки.

Дано: $P=10 \text{ кН}$, $l=1\text{ м}$, $h/b=1,2$.

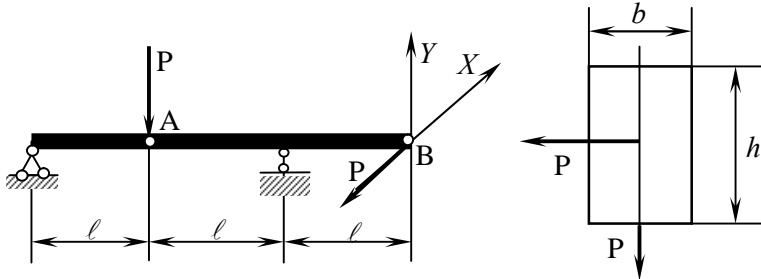


Рисунок 1.1 – Неплоске згинання двоопорної балки з консоллю

1.2.1 Застосовуючи принцип незалежності дії сил розглянемо окремо випадки горизонтального та вертикального навантаження (Рис. 1.2 а, б).

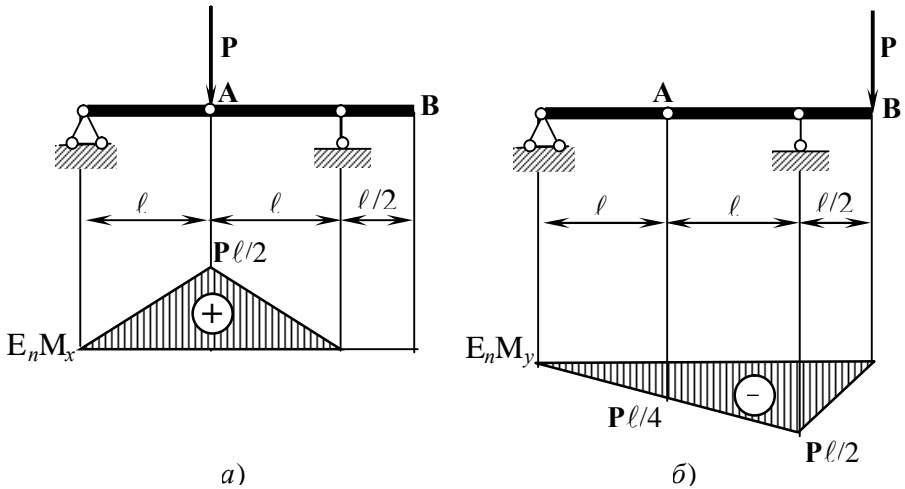


Рисунок 1.2 – Епюри згинальних моментів від вертикального (а) та горизонтального (б) навантаження

1.2.2 Небезпечний переріз знаходиться в т. A . Визначимо для нього згинальні моменти.

$$M_x = \frac{Pl}{2} = \frac{10 \cdot 1}{2} = 5 \text{ (кНм)}, \quad M_y = \frac{Pl}{4} = \frac{10 \cdot 1}{4} = 2,5 \text{ (кНм)}.$$

1.2.3 Визначаємо моменти опору прямокутного перерізу.

$$W_x = \frac{bh^2}{6}, \quad W_y = \frac{hb^2}{6}.$$

$$\text{З урахуванням } \frac{h}{b} = 1,2, \quad W_x = \frac{h^3}{7,2}, \quad W_y = \frac{h^3}{8,64}.$$

Складемо умову міцності

$$\sigma = \frac{5 \cdot 10^{-3} \cdot 7,2}{h^3} + \frac{2,5 \cdot 10^{-3} \cdot 8,64}{h^3} \leq [\sigma],$$

звідки $h = \sqrt[3]{\frac{(5 \cdot 7,2 + 2,5 \cdot 7,2) \cdot 10^{-3}}{8}} = 0,193 \text{ м},$ тобто $h = 19,3 \text{ см},$

$b = 16,08 \text{ см}.$

1.2.5 Визначимо геометричні характеристики поперечного перерізу балки

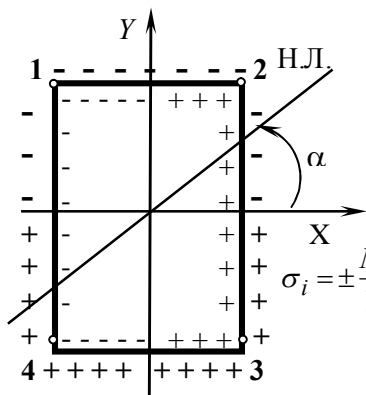
$$I_x = \frac{bh^3}{12} = 9633 \text{ см}^4, \quad W_x = \frac{I_x}{h/2} = 998,27 \approx 1000 \text{ см}^3,$$

$$I_y = \frac{hb^3}{12} = 6687 \text{ см}^4, \quad W_y = \frac{I_y}{b/2} = 831 \approx 830 \text{ см}^3.$$

1.2.6 Визначимо кут нахилу нейтральної лінії

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{M_y}{M_x} \cdot \frac{I_x}{I_y} = \frac{2,5 \cdot 9633}{5 \cdot 6687} = 0,72, \quad \alpha = 36^\circ.$$

1.2.7 Визначимо для небезпечного перерізу (т. А) напруження в кутових точках. (Зовнішній контур – знаки напруження відносно осі “X”, внутрішній – відносно осі “Y”).



Напруження у будь-якій точці:

$$\sigma_i = \pm \frac{M_x}{W_x} \pm \frac{M_y}{W_y} = \pm \frac{5 \cdot 10^{-3}}{1000 \cdot 10^{-6}} \pm \frac{2,5 \cdot 1 \cdot 10^{-3}}{830 \cdot 10^{-6}} = \pm 5 \pm 3 (\text{МПа})$$

ТАКИМ ЧИНОМ

$$\sigma_1 = -5 - 3 = -8(\text{МПа})$$

$$\sigma_2 = -5 + 3 = -2(\text{МПа})$$

$$\sigma_3 = +5 + 3 = 8(\text{МПа})$$

$$\sigma_4 = +5 - 3 = 2(\text{МПа})$$

Максимальне напруження σ_{\max} не повинно перевищувати допустиме $[\sigma]$.

1.2.8 Будуємо епюри напружень в аксонометрії.

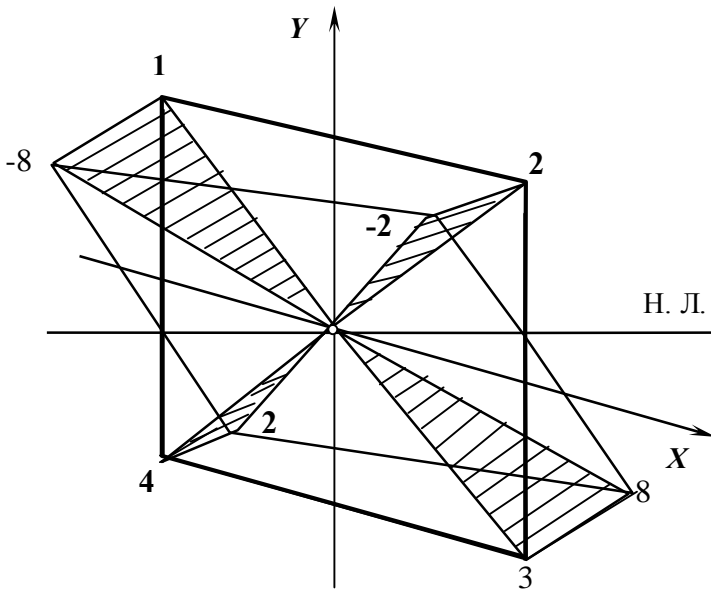


Рисунок 1.3 – Епюри напружень в аксонометрії

Примітка: Діагоналі з найбільшими та найменшими напруженнями виділити кольоровими олівцями.

2 РОЗРАХУНКИ НА МІЦНІСТЬ І СТІЙКІСТЬ СТИСНУТИХ СТЕРЖНІВ

2.1 Короткі теоретичні відомості

Пружна рівновага буде стійкою якщо деформоване тіло при будь-якому малому відхиленні від стану рівноваги повертається до нього після вилучення зовнішнього впливу [1].

Пружна рівновага буде нестійкою якщо деформоване тіло виведене з рівноваги, прагне деформуватися у напрямі наданого йому відхилення від положення рівноваги й після вилучення впливу у початковий стан не повертається.

Між цими двома станами знаходиться перехідний, котрий називається критичним. При критичному стані деформоване тіло знаходиться у байдужій рівновазі. Навантаження, яке призводить до втрати стійкості початкової форми рівноваги тіла, називають критичним.

Задача по з визначенню величини критичної сили для центрально стиснутого стержня вперше була розв'язана Л. Ейлером наприкінці XVIII сторіччя.

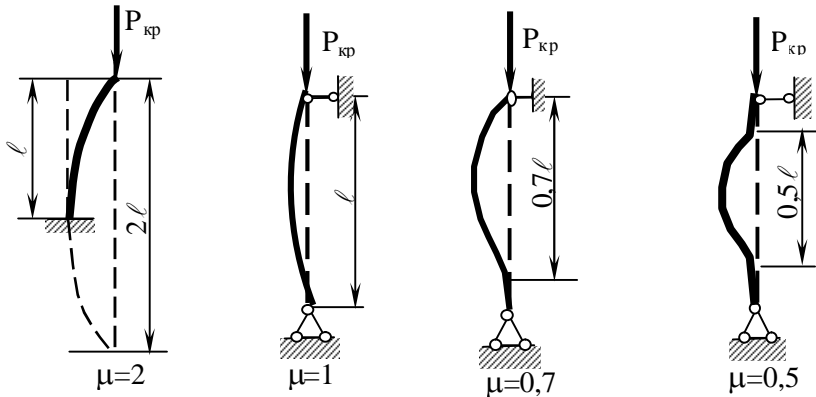


Рисунок 2.1 – Значення коефіцієнтів (μ) в залежності від умов закріплення стержня.

Критична сила по Ейлеру

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{(\mu l)^2},$$

де коефіцієнт μ залежить від умов закріплення кінців стержня (Рис. 2.1).

Критичне напруження по Ейлеру

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}, \text{ де } \lambda - \text{гнучкість стержня};$$

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}}, \text{ де } i_{\min} - \text{мінімальний радіус інерції перерізу стержня.}$$

Формула Ейлера справедлива коли $\sigma_{кр} \leq \sigma_{пц}$, де $\sigma_{пц}$ - границя пропорційності матеріала стержня.

Для сталі марки Ст3 формула Ейлера може бути застосована якщо $\lambda > 100$. Якщо гнучкість λ змінюється у межах $40 < \lambda < 100$, то для визначення критичного напруження користуються формулою Ф.С. Ясинського $\sigma_{кр} = a - b\lambda$, де a і b - табличні коефіцієнти.

Наприклад, для Ст3 $a=310,8$ МПа, $b=1,14$ МПа [5].

Стержні будь-якої гнучкості ($0 \leq \lambda \leq 200$) можуть бути розраховані за формулою $\frac{P}{F \cdot \varphi} \leq [\sigma]_{стиск}$, де φ - коефіцієнт, що залежить від λ , вибирають з таблиць у відповідності з матеріалом стержня (див. Додаток, табл.).

2.2 Приклад розв'язку задачі

Сталевий стержень завдовжки $l=3$ м стискається силою $P=350$ кН. Схему закріплення та форму поперечного перерізу наведено на рис.2.2.

Потрібно:

а) Визначити розміри поперечного перерізу (а) при допустимому напруженні на стискання $[\sigma]=160$ МПа (розрахунок виконувати послідовним наближенням попередньо поклавши $\varphi_0=0,5$).

б) Визначити критичну силу $P_{кр}$ коефіцієнт запасу стійкості $n_{ст}$.

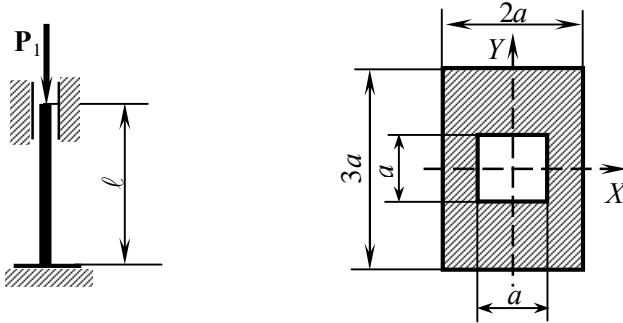


Рисунок 2.2 – Схема закріплення, форма та розміри поперечного перерізу стержня

2.2.1 Попередньо визначимо площу поперечного перерізу

$$F = 3a \cdot 2a - a^2 = 5a^2, \quad \text{звідки} \quad a = \sqrt{\frac{F}{5}}.$$

У першому наближенні з умови стійкості $\sigma = \frac{P}{F \cdot \varphi} \leq [\sigma]$.

Площа поперечного перерізу стержня при $\varphi_0 = 0,5$

$$F_1 = \frac{P}{[\sigma] \cdot \varphi_0} = \frac{0,35}{160 \cdot 0,5} = 0,004375 \text{ м}^2 \approx 44 \text{ см}^2,$$

$$\text{звідки} \quad a_1 = \sqrt{\frac{F_1}{5}} = \sqrt{\frac{44}{5}} = 2,966 \text{ см} \approx 3 \text{ см}.$$

2.2.2 З метою уточнення значення коефіцієнта φ як функції від гнучкості визначаємо мінімальний момент інерції, мінімальний радіус інерції та гнучкість.

$$I_{\min} = I_y = \frac{3a \cdot (2a)^3 - a^4}{12} = \frac{23}{12} a^4 = 1,916 \cdot 3^4 = 155 \text{ (см)}^4$$

Для розглядуваного випадку $\mu = 0,5$

$$\text{Тоді } \lambda_1 = \frac{\mu l}{i_{\min}} = \frac{0,5 \cdot 300}{1,88} = 80.$$

Для $\lambda_1 = 80$ $\varphi_1 = 0,75$ (див. табл.).

2.2.3 Перевіряємо умову стійкості.

Оскільки $\sigma = \frac{P}{F \cdot \varphi_1} = \frac{0,35}{0,0044 \cdot 0,75} = 106 \text{ (МПа)}$, а

похибка $\delta = \frac{160 - 106}{160} \cdot 100\% = 33,75\%$ перевищує 5% уточнюємо розрахунки у другому наближенні.

Визначаємо I_{\min} , i_{\min} та λ

$$I_{\min} = 1,916 \cdot 2,645^4 = 93,77 \text{ (см)}^4, \quad i_{\min} = \sqrt{\frac{93,77}{35}} = 1,636 \text{ (см)}, \quad \lambda = \frac{0,5 \cdot 300}{1,636} = 91,64$$

Для $\lambda = 91,64$ коефіцієнт $\varphi_3 = 0,675$ (визначення проводимо методом лінійної інтерполяції із табл. 1 у додатку).

2.2.4 Перевіряємо умову стійкості

$$\sigma = \frac{P}{F_2 \varphi_3} = \frac{0,35}{0,0035 \cdot 0,675} = 148 \text{ (МПа)}$$

оскільки похибка $\delta = \frac{160-148}{160} \cdot 100\% = 7,5\%$ також перевищує 5% уточнюємо розрахунок у третьому наближенні:

$$\varphi_4 = \frac{0,625+0,675}{2} = 0,65, \quad F_3 = \frac{0,35}{160 \cdot 0,65} = 0,003365 (\text{м}^2), \quad a_3 = \sqrt{\frac{33,65}{5}} = 2,594 (\text{см})$$

$$I_{\min} = 1,916 \cdot 2,594^4 = 86,75 (\text{см}^4), \quad i_{\min} = \sqrt{\frac{86,75}{33,65}} = 1,6 (\text{см}), \quad \lambda = \frac{0,5 \cdot 300}{1,6} = 93,75$$

Для $\lambda = 93,75$ коефіцієнт $\varphi_4 = 0,656$.

2.2.5 Перевіряємо умову стійкості

$$\sigma = \frac{P}{F_3 \varphi_4} = \frac{0,35}{0,003365 \cdot 0,656} = 158,75 (\text{МПа}).$$

Похибка $\delta = \frac{160-158,75}{160} \cdot 100\% = 0,8\%$ робимо висновок, що умова міцності задовольняється при $a=2,59$ см.

2.2.6 Оскільки гнучкість $\lambda < 100$, то величину критичної сили визначаємо за формулою Ф.С. Ясинського $P_{\text{кр}} = (a - b\lambda)F$

$$P_{\text{кр}} = (310 - 1,14 \cdot 93,75) \cdot 0,003365 = 0,6835 \text{ МН}.$$

2.2.7 Визначаємо коефіцієнт запасу стійкості

$$n_{\text{ст}} = \frac{P_{\text{кр}}}{P} = \frac{0,6835}{0,35} = 1,95.$$

Для більшості конструкційних сталей $n_{\text{ст}} = 1,8 \div 3,0$.

3 РОЗРАХУНКИ НА МІЦНІСТЬ ПРИ КОЛИВАННЯХ

3.1 Короткі теоретичні відомості

При коливаннях пружних систем виникають динамічні напруження

$$\sigma_{\partial} = \sigma_{\text{ст}} \cdot K_{\partial},$$

де $\sigma_{\text{ст}}$ - статичні напруження (або $\tau_{\text{ст}}$ в залежності від виду деформації),

K_{∂} - коефіцієнт динамічності.

У випадку вимушених коливань системи з одним ступенем вільності

$$K_{\partial} = 1 + \frac{H}{Q} \beta,$$

де Q - вага вантажу, що коливається,

H - збурююча сила,

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]^2 + 4\left(\frac{n'}{\omega_0}\right)^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} - \text{коефіцієнт наростання коливань,}$$

ω_0 - частота власних коливань,

ω - частота коливань збурюючої сили,

n' - коефіцієнт згасання коливань.

3.2 Приклад розв'язку задачі

На двох балках двотаврового перерізу (Рис. 3.1) встановлено двигун вагою Q , що робить n обертів за хвилину. Внаслідок невірноваженості частин двигуна, що обертаються, виникає відцентрова сила інерції H . Власну вагу балок та сили опору можна не враховувати. Потрібно знати найбільші динамічні напруження, що виникають у балках $\sigma_{\partial_{\text{max}}}$.

Дані вибрати з таблиць. Наприклад: двотавр №16

$(I_x = 945 \text{ см}^4, W_x = 118 \text{ см}^3), l = 2 \text{ м}, Q = 20 \text{ кН}, H = 10 \text{ кН},$

$n = 600 \text{ об/хв}, n' = 0, E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$

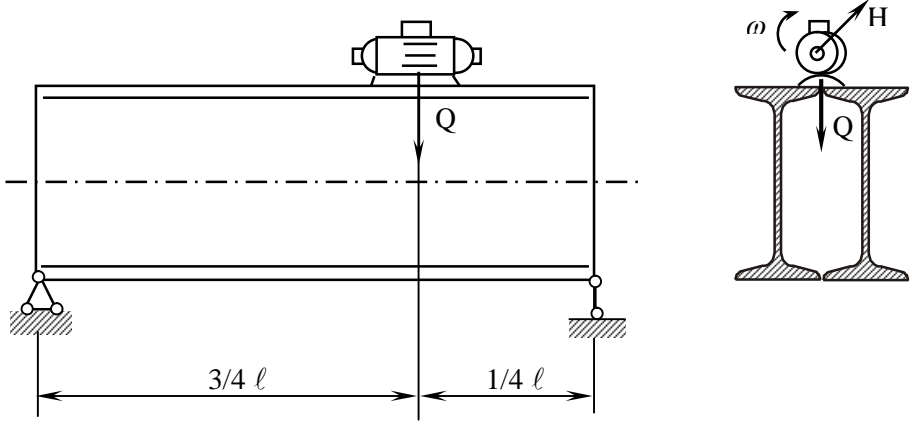


Рисунок 3.1 – Розрахункова схема

3.2.1 Для визначення частоти власних коливань

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\Delta_{\text{ст}}}},$$

де $g = 9,81 \text{ м/с}^2$ - прискорення вільного падіння, необхідно визначити статичну деформацію системи $\Delta_{\text{ст}}$ від вантажу Q . Це можна зробити способом А.Н. Верещагіна (Рис. 3.2).

$$\Delta_{\text{ст}} = \frac{\omega_1 y_{c1} + \omega_2 y_{c2}}{2EI_x} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{16} Ql \cdot \frac{3}{4} l \cdot \frac{l}{8} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{16} Ql \cdot \frac{l}{4} \cdot \frac{l}{8}}{2EI_x} = \frac{3Ql^3}{512EI_x}.$$

Таким чином

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g \cdot 512EI_x}{3Ql^3}} = \sqrt{\frac{9,81 \cdot 512 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 945 \cdot 10^{-8}}{3 \cdot 20 \cdot 10^3 \cdot 2^3}} = 140,6 \text{ (с}^{-1}\text{)}.$$

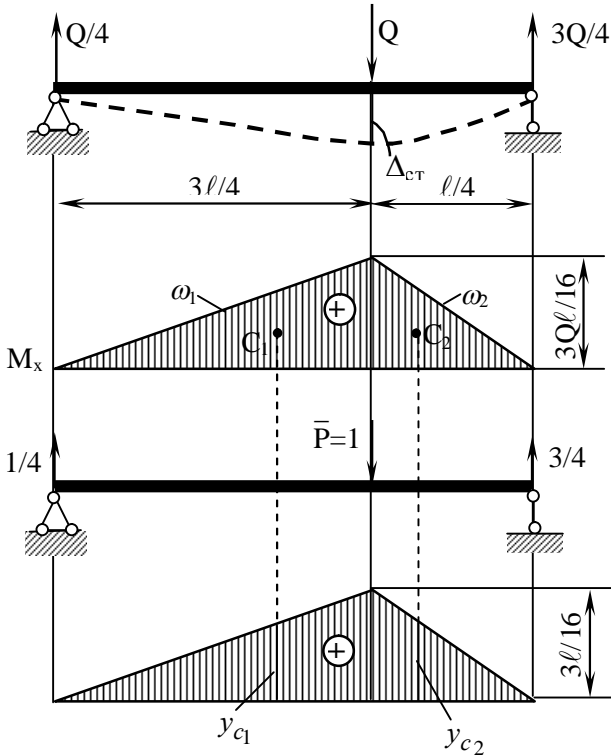


Рисунок 3.2 – До визначення переміщення способом Верещагіна

3.2.2 Визначаємо частоту коливань збурюючої сили

$$\omega = \frac{\pi n}{30} = \frac{3,14 \cdot 600}{30} = 62,8 \text{ (с}^{-1}\text{)}.$$

3.2.3 Визначаємо коефіцієнт наростання коливань при $n' = 0$

$$\beta = \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} = \frac{1}{1 - \left(\frac{62,8}{140,6}\right)^2} = 1,25.$$

3.2.4 Визначаємо коефіцієнт динамічності

$$K_{\partial} = 1 + \frac{H}{Q} \beta = 1 + \frac{10}{20} \cdot 1,25 = 1,625.$$

3.2.5 Визначаємо найбільше динамічне напруження

$$\sigma_{\partial \max} = \sigma_{\text{ст} \max} \cdot K_{\partial} = \frac{M_{x \max}}{2W_x} \cdot K_{\partial} = \frac{3 \cdot Ql}{2W_x} \cdot K_{\partial} = \frac{3}{16} \cdot 20 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 1,625 = 51,6 \text{ (МПа)}.$$

4 РОЗРАХУНКИ НА МІЦНІСТЬ ПРИ УДАРНИХ НАВАНТАЖЕННЯХ

4.1 Короткі теоретичні відомості

При ударних навантаженнях коефіцієнт динамічності без урахування власної ваги системи визначають за формулою

$$K_{\partial} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{\text{ст}}}},$$

де h - висота падіння вантажу,

$\Delta_{\text{ст}}$ - статичне переміщення точки закріплення вантажу з системою від статичної сили, яка чисельно дорівнює вазі вантажу.

4.2 Приклад розв'язку задачі

На двотаврову балку №30 ($I_x = 7080 \text{ см}^4$, $W_x = 472 \text{ см}^3$) завдовжки $l = 3 \text{ м}$, що вільно лежить на двох жорстких опорах (Рис. 4.1) з висоти $h = 10 \text{ см}$ падає вантаж $P = 1000 \text{ Н}$.

Потрібно знайти найбільші нормальні напруження в разі жорстких опор та коли одна з опор пружна, піддатливість котрої (тобто осадка пружини від вантажу) $\alpha = 30 \cdot 10^{-3} \text{ м/кН}$.

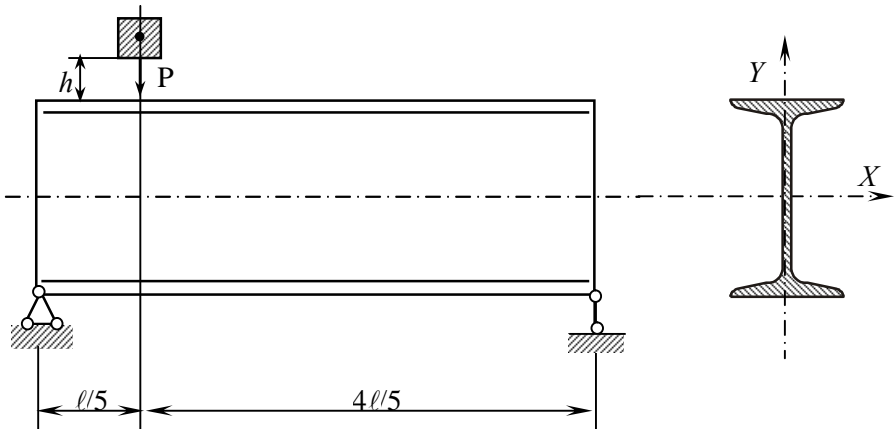


Рисунок 4.1 – Двотаврова балка на двох жорстких опорах

4.2.1 Визначаємо статичний прогин $\Delta_{ст}$ в точці удару способом А.Н. Верещагіна. Для цього розглянемо балку, що підлягає згинальному удару як статично навантажену систему (Рис. 4.2) і виконаємо розрахунки у відповідній послідовності.

Визначаємо реакції опор

$$\sum M_A = 0, \quad -P \frac{l}{5} + R_B \cdot l = 0, \quad R_B = \frac{P}{5}, \quad \sum M_B = 0, \quad P \cdot \frac{4l}{5} - R_A \cdot l = 0, \quad R_A = \frac{4}{5}P$$

$$\text{Перевірка } \sum P_y = 0, \quad R_A - P + R_B = 0, \quad \frac{4P}{5} + \frac{P}{5} - P = 0.$$

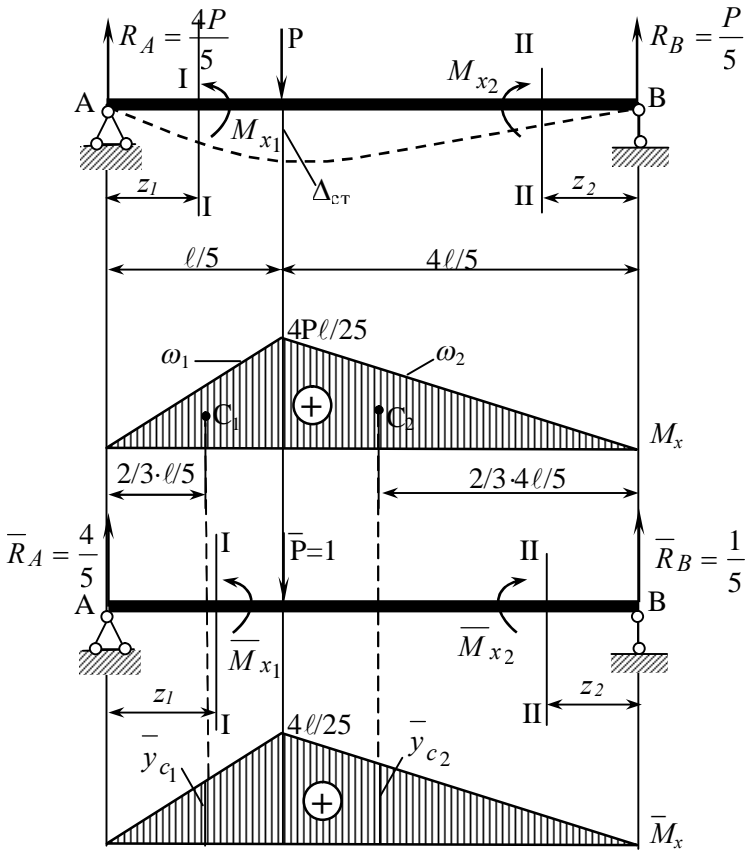


Рисунок 4.2 – До визначення статичного прогину способом А.Н. Верещагіна

Визначаємо реакції опор для одиничної системи

$$\sum \bar{M}_A = 0, \quad -\frac{l}{5} + \bar{R}_B \cdot l = 0, \quad \bar{R}_B = \frac{1}{5}, \quad \sum \bar{M}_B = 0, \quad \frac{4l}{5} - \bar{R}_A \cdot l = 0, \quad \bar{R}_A = \frac{4}{5}$$

Перевірка $\sum \bar{P}_y = 0, \quad \bar{R}_A - \bar{P} + R_B = 0, \quad \frac{4}{5} - 1 + \frac{1}{5} = 0.$

Будуємо епюри згинальних моментів M_x та \bar{M}_x (Рис. 4.2)

Ділянка I-I: $0 \leq z_1 \leq \frac{l}{5}$

$$M_{x1} = \frac{4P}{5}z_1, \quad \text{при } z_1 = 0, \quad M_{x1} = 0; \quad \text{при } z_1 = \frac{l}{5}, \quad M_{x1} = \frac{4Pl}{25}$$

$$\bar{M}_x = \frac{4}{5}z_1, \quad \text{при } z_1 = 0, \quad \bar{M}_{x1} = 0; \quad \text{при } z_1 = \frac{l}{5}, \quad \bar{M}_{x1} = \frac{4}{25}l$$

Ділянка II-II: $0 \leq z_2 \leq \frac{4}{5}l$

$$M_{x2} = \frac{P}{5}z_2, \quad \text{при } z_2 = 0, \quad M_{x2} = 0; \quad \text{при } z_2 = \frac{4}{5}l, \quad M_{x2} = \frac{4Pl}{25}.$$

Визначаємо площі епюр ω_{M_x} та ординати \bar{Y}_c

$$\omega_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{l}{5} \cdot \frac{4}{25} Pl = 0,016Pl^2, \quad \omega_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5}l \cdot \frac{4}{25} Pl = 0,064Pl^2;$$

$$\bar{Y}_{c1} = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{25}l = 0,107l, \quad \bar{Y}_{c2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{25}l = 0,107l, \quad \bar{Y}_{c1} = \bar{Y}_{c2}$$

Статичний прогин

$$\Delta_{ст} = \frac{\omega_1 \bar{Y}_{c1} + \omega_2 \bar{Y}_{c2}}{EI_x} = \frac{(0,016Pl^2 + 0,064Pl^2) \cdot 0,107l}{EI_x} = 1,63 \cdot 10^{-5} \text{ м}$$

4.2.2 Визначаємо коефіцієнт динамічності

$$K_D = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{ст}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 0,1}{1,63 \cdot 10^{-5}}} = 111,8.$$

4.2.3 Визначаємо максимальні статичні нормальні напруження

$$\sigma_{\text{ст}}^{\text{max}} = \frac{M_x^{\text{max}}}{W_x} = \frac{\frac{4}{25}Pl}{W_x} = \frac{480}{478} = 1,004 \text{ (МПа)}.$$

4.2.4 Визначаємо максимальні динамічні напруження

$$\sigma_{\delta}^{\text{max}} = \sigma_{\text{ст}}^{\text{max}} \cdot K_{\delta} = 1,004 \cdot 111,8 = 112,2 \text{ (МПа)}.$$

4.2.5 З метою зменшення напружень замінюємо праву опору пружиною (Рис. 4.3).

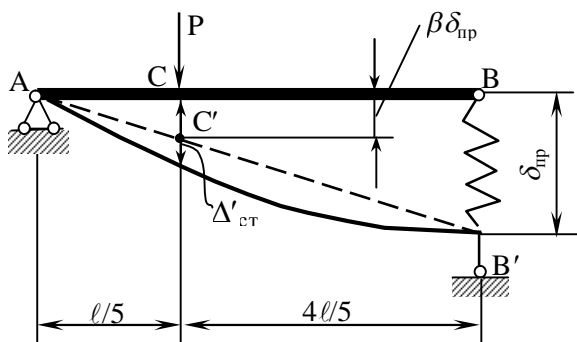


Рисунок 4.3 – Схема деформування балки

4.2.6 Визначаємо статичний прогин з пружиною

$$\Delta'_{\text{ст}} = \Delta_{\text{ст}} + \beta \delta_{\text{пр}} = 1,63 \cdot 10^{-5} + 0,20 \cdot 6 \cdot 10^{-3} = 1,2 \cdot 10^{-3} \text{ м},$$

де $\delta_{\text{пр}} = BB' = R_B \cdot \alpha = \frac{1}{5} \cdot 30 \cdot 10^{-3} = 6 \cdot 10^{-3} \text{ м}$ – осадка пружини на опорі B від сили P.

Із подібності трикутників ACC' і ABB' визначаємо коефіцієнт β , що встановлює залежність між $\delta_{\text{пр}}$ і положенням точки прикладення сили P

$$\beta = \frac{l/5}{l} = 0,20.$$

4.2.7 Визначаємо коефіцієнт динамічності

$$K'_\partial = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta'_{\text{ст}}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 0,1}{1,2 \cdot 10^{-3}}} = 13,8.$$

4.2.8 Визначаємо динамічні напруження

$$\sigma_\partial^{\text{max}} = \sigma_{\text{ст}}^{\text{max}} \cdot K'_\partial = 1,004 \cdot 13,8 = 13,9 \text{ (МПа)}.$$

Таким чином застосування пружної опори значно знижує напруження, що виникають в наслідок удару.

5 РОЗРАХУНКИ НА МІЦНІСТЬ З УРАХУВАННЯМ СИЛ ІНЕРЦІЇ

5.1 Короткі теоретичні відомості

Статичним навантаженням називають навантаження, яке достатньо повільно набуває свого значення. Швидкість наростання деформації від такого навантаження невелика, а тому можна знехтувати виникаючими при цьому силами інерції. Ці сили необхідно врахувати також при дії навантаження, що спричиняє рух тіла з прискоренням. Такі навантаження, а також відповідні напруження і деформації називають динамічними[1].

При динамічному навантаженні довільний елемент конструкції в кожний момент часу можна розглядати як такий, що знаходиться у рівновазі під дією зовнішніх сил (в тому числі і реакції опор), внутрішніх сил і сил інерції. Це положення носить назву принципу Д'Аламбера.

Сили інерції, як і власна вага, є об'ємними силами, що прикладені в кожній елементарній частинці об'єму тіла.

При розв'язуванні задачі треба мати на увазі:

а) Сили інерції, що виникають при обертанні валика АВ і з'єднаного з ним ламаного стержня складаються з силами власної ваги, але останніми нехтують у зв'язку з їх малістю.

б) Для спрощення треба проводити розрахунки в загальному вигляді позначивши інтенсивність навантаження від сил інерції через q . Рівнодійні сил інерції на горизонтальних і вертикальних ділянках, опорні реакції, ординати епюр M_x треба виражати через q і l .

5.2 Приклад розв'язку задачі

Валик ($l=0,2\text{м}$) і жорстко з'єднаний з ним ламаний стержень того ж поперечного перерізу ($d=0,022\text{м}$) обертається зі сталюю кутовою швидкістю ω навколо осі АВ.

Необхідно побудувати епюру згинальних моментів від сил інерції й знайти допустиме число обертів валика при допустимому напруженні $[\sigma]=100\text{ МПа}$ та $\gamma = 78 \frac{\text{кН}}{\text{м}^3}$.

5.2.1 За даною системою складаємо розрахункову схему (Рис.5.1 а, б) зупинивши, згідно принципу Д'Аламбера обертання стержня. В результаті маємо плоску статично визначувану раму, котра навантажена розподіленим навантаженням, що дорівнює силам інерції q_1 і q_2 .

5.2.2 Ділянка CD навантажена силами інерції за лінійним законом (у вигляді трикутника).

$$q_{(Z)} = \frac{\gamma F}{g} \omega^2 Z, \quad \text{при } Z = 0, \quad q_Z = 0; \quad \text{при } Z = l, \quad q_{(Z)} = \frac{\gamma F}{g} \omega^2 l = q_1.$$

5.2.3 На ділянці DE сили інерції рівномірно розподілені по довжині $q_2 = \frac{\gamma F}{g} \omega^2 l = \text{const}$, при цьому в точці D інтенсивність сил інерції однакова на обох ділянках $q_1 = q_2 = q$.

5.2.4 Визначаємо опорні реакції (Рис 5.1,б)

$$\sum M_A = 0, \quad -\frac{ql}{2} \cdot 3l - ql \cdot 2,5l + R_B \cdot 2l = 0$$

$$R_B = \frac{1,5ql^2 + 2,5ql^2}{2l} = 2ql$$

$$\sum M_B = 0, \quad R_A \cdot 2l - \frac{ql}{2}l - ql \frac{l}{2} = 0$$

$$R_A = \frac{0,5ql^2 + 0,5ql^2}{2l} = 0,5ql$$

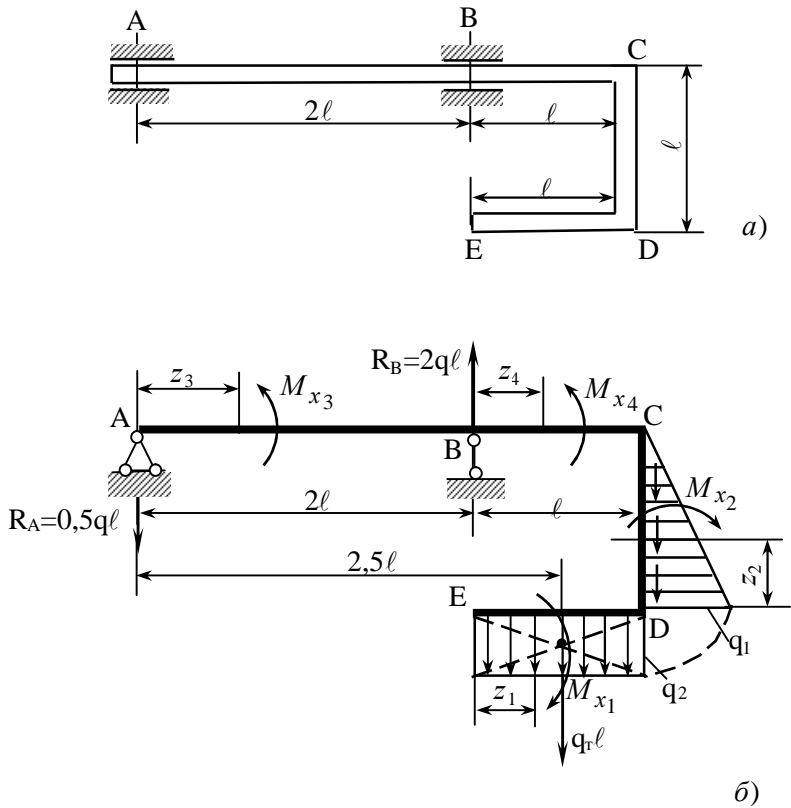


Рисунок 5.1 - Задана (а) і розрахункова (б) схеми.

Перевірка

$$\sum P_y = 0, \quad -R_A + R_B - \frac{ql}{2} - ql = 0, \quad -0,5ql - 2ql - 0,5ql - ql = 0.$$

5.2.5 Епюру згинальних моментів (Рис 5.2) будемо складаючи рівняння моментів на ділянках системи “обходячи” її по внутрішньому контуру (Дивись рис. 5.1).

Ділянка ED: $0 \leq Z_1 \leq l$,

$$M_{x_1} = \frac{qZ_1^2}{2}; \quad \text{при } Z_1 = 0, \quad M_x = 0; \quad \text{при } Z_1 = l, \quad M_{x_1} = \frac{ql^2}{2}.$$

Ділянка CD: $0 \leq Z_2 \leq l$, $M_{x_2} = const$.

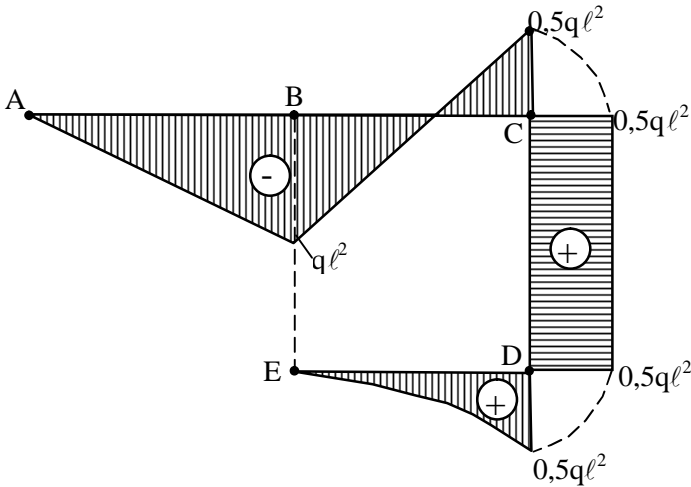


Рисунок 5.2 - Епюра згинальних моментів від сил інерції.

Ділянка АВ: $0 \leq Z_3 \leq 2l$

$$M_{x_3} = -R_A \cdot Z_3 \quad \text{при } Z_3 = 0, \quad M_{x_3} = 0, \quad \text{при } Z_3 = 2l, \quad M_{x_3} = -ql^2.$$

Ділянка ВС: $0 \leq Z_4 \leq l$

$$M_{x_4} = -R_A(2l + Z_4) + R_B \cdot Z_4, \quad \text{при } Z_4 = 0, \quad M_{x_4} = -ql^2, \quad \text{при}$$

$$Z_4 = l, \quad M_{x_4} = +\frac{ql^2}{2}.$$

5.2.6 Із епюри M_x випливає, що небезпечний переріз знаходиться на опорі В де $M_x = M_x^{\max} = |ql^2|$.

5.2.7 Із умови міцності по нормальним напруженням при згинанні визначаємо допустиме число обертів валика.

$$\sigma = \frac{M_x^{\max}}{W_x} \leq [\sigma],$$

$$\sigma = \frac{ql^2}{W_x} = \frac{\gamma F \omega^2 l \cdot l^2}{q W_x} = \frac{\gamma \pi d^2 \omega^2 l^3 \cdot 32}{4q \pi d^3} = \frac{8\gamma \omega^2 l^3}{qd} = [\sigma],$$

$$\omega = \sqrt{\frac{[\sigma] q d}{8\gamma l^3}} = \sqrt{\frac{100 \cdot 9 \cdot 81 \cdot 0,022 \cdot 10^2}{8 \cdot 7,8 \cdot 0,2^3}} = 65,75 \text{ (с}^{-1}\text{)},$$

$$\text{Звідки} \quad n = \frac{\omega \cdot 30}{\pi} = \frac{65 \cdot 75 \cdot 30}{3,14} = 628,18 \text{ (об/хв)}.$$

Таким чином при такій швидкості обертання валика напруження у небезпечних точках конструкції не перевищуватимуть допустимих, тобто міцність конструкції забезпечена.

ЛІТЕРАТУРА

1. Опір матеріалів: Підручник / Г.С. Писаренко, О.А. Квітка, Е.С. Уманський; за ред. Г.С. Писаренка / -К.: Вища шк., 1993. - 655 с.
2. Сопротивление материалов: Методические указания и контрольные задания /А.В.Дарков, Б.Кутуков - 14-е изд. -М: Высш. шк., 1985. - 56 с.
3. Контрольні завдання з курсу "Опір матеріалів" /- ЗДТУ, 1999 - 50 с.
4. Сопротивление материалов / Под ред. Писаренко Г.С. 15-е изд. - К.: Высш. шк., 1986. -775 с.
5. Справочник по сопротивлению материалов / Писаренко Г.С., Яковлев А.П., Матвеев В.В.; отв. ред. Писаренко Г.С. -2-е изд. -К.: Наук. думка, 1988. -736 с.

Коефіцієнти умовного напруження на стискання φ

Таблиця 1

Сталь Ст0	Гнучкість λ	φ
	0	1,00
	10	0,99
	20	0,97
	30	0,95
	40	0,92
	50	0,89
	60	0,86
	70	0,81
	80	0,75
	90	0,69
	100	0,60
	110	0,52
	120	0,45
	130	0,40
	140	0,36
	150	0,32
	160	0,29
	170	0,26
	180	0,23
	190	0,21
	200	0,19